

Technical Report DIKU-TR-97/14
Department of Computer Science
University of Copenhagen
Universitetsparken 1
2100 KBH Ø
DENMARK

May 1997

Multiopløsningsanalyse, ortogonale
wavelets og kvadraturfiltre

Morten Nicolaj Pedersen

Multiopløsningsanalyse, ortogonale wavelets og kvadraturfiltre

Morten Nicolaj Pedersen

8. maj 1997

1 Forord

Indenfor disciplinen mønstergenkendelse er det en klassisk metode at transformere et signal, før det analyseres. En sådan transformation har ofte karakter af opløsning af signalet i en linearkombination af bestemte byggeblokke — resultatet er så koefficienterne.

Det kanoniske eksempel er kort-tids Fourier transformationen (*STFT*), som opløser et signal i tidsbegrænsede svingninger af en bestemt frekvens. Den er indlysende at fremhæve fordi, den indtil for få år siden var den eneste anvendte. En ulempe ved *STFT* er, at der kan opstå et dilemma i forbindelse med valg af vinduets størrelse. Vælges det for smalt, er der ikke information nok at analysere, hvorimod et for bredt vindue bevirker, at man ikke analyserer et øjebliksbillede. Desuden kan det være svært overhovedet at vide, hvor temporær den information, man ønsker at udvinde, er.

Man har desuden påpeget en anden hage ved brug af *STFT* i forbindelse med billedbehandling. En diskretisering svarer til en opdeling af frekvensaksen i intervaller af konstant bredde Δ_ω ¹. Dette er uheldigt set i forhold til, at forskning indenfor psykofysiologi har sandsynliggjort, at mennesket splitter synsindtryk op i frekvensbånd, der har konstant bredde på en *logaritmisk* skala.

Dette projekt beskriver en transformation, der ikke har disse svagheder. Den baserer sig på dekomposition af et signal vha. elementære byggeblokke, der har lokalisering i både tid og frekvens. Det interessante er, at teknikken blev opdaget på to forskellige måder uafhængigt af hinanden. Begge faconer skitseres, og forbindelsen klarlægges. Desuden gives via en implementation i MATLAB illustrative eksempler.

¹Selvfølgelig sampler man også i tidsdomænet - f.eks. med hastigheden $1/\Delta_t$.

2 Ortogonale wavelets

Til brug ved mønstergenkendelse har man foreslået *grov-til-fin analyse*. En sådan tager sit udgangspunkt i et signals approksimationer $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ved forskellige opløsninger j . Deraf forsøger man at destillere forskellen d_j — kaldet detaljerne ved opløsning j — i information ved opløsning a_{j+1} og a_j . Dermed haves en alternativ repræsentation af signalet. Tanken er så at behandle det parallelt ved flere opløsninger vha. $(d_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ udfra en betragtning om, at informationen på en grovere skala giver konteksten for den tilsvarende del af signalet på en finere skala. Det skulle så være muligt, at genkende mønstre, der har karakteristika på vidt forskellige skalaer. Dette er en klar fordel i forhold til *STFT*, hvor man må lægge sig fast på ét vindue. Fremskaffningen af repræsentationen, der er grundlaget for metodens brug, kaldes en *multiopløsnings-transformation*.

Burt et al. [1] og Crowley [2] har foreslået et signals Laplace-pyramide som analysegrundlag. En sådan lider dog under den skavank, at informationen på forskellige niveauer er korreleret. Denne redundans besværliggører foretagenet.

Mallats arbejde med multiopløsning [3], [4] har resulteret i en transformation, hvor dette ikke er tilfældet. Det er den ene af de to indfaldsvinkler, der vil blive omtalt i projektet. Den er matematisk og oprinder i funktionalanalysen. Jeg lægger således ud med at skaffe overblik ved at beskæftige mig med aksiomatisering af egenskaber i en kontinuert ramme af kvadratisk integrable funktioner, før der diskuteres diskretisering af begreberne og tilhørende realisering. Blot bliver der ikke tale om en definition, der kan synes taget ud af luften - der suppleres med intuitive argumenter, som retfærdiggøres af de stærke resultater, som kan udledes.

2.1 Approksimation

Det er ønskeligt, at forholdet mellem størrelsen af a_{j+1} og a_j er lig en fast parameter α . Dermed bliver repræsentationen nemlig delvist skala-invariant. For en nemheds skyld vælger man normalt en fordobling, dvs. man er interesseret i opløsningerne $(2^j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Operatoren A_{2^j} , der tilnærmer et signal $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ ved opløsningen 2^j , skal have følgende egenskaber.

1. A_{2^j} er den ortogonale projektionen af $f(t)$ på et bestemt underrum af $L_2(\mathbb{R})$, som skrives V_{2^j} . Dvs. A_{2^j} skal være lineær og udvælge den funktion i V_{2^j} , som er tættest på $f(t)$ i normforstand:

$$\forall g(t) \in V_{2^j} : \|g(t) - f(t)\| \geq \|A_{2^j} f(t) - f(t)\|$$

Man kan tænke på V_{2^j} som mængden af mulige tilnærmelser ved opløsningen 2^j af funktioner i $L_2(\mathbb{R})$.

2. Approksimationen $A_{2^j} f(t)$ kan beregnes udfra $A_{2^{j+1}} f(t)$. Dette princip kan også formuleres:

$$\forall j \in \mathbb{Z} : V_{2^j} \subseteq V_{2^{j+1}}$$

3. Approksimeringsmetoden afhænger ikke af opløsningen, så ved skalering kan man bevæge sig mellem underrummene:

$$\forall j \in \mathbb{Z} : f(t) \in V_{2^j} \Leftrightarrow f(2t) \in V_{2^{j+1}} \quad (1)$$

4. $A_{2^j} f(t)$ er beskrevet ved 2^j samples i intervallet $[t_0, t_0 + 1[$, $t_0 \in \mathbb{Z}$. Forskydes $f(t)$ stykket $2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$, gælder det samme for $A_{2^j} f(t)$ og de beskrivende samples. Det er nok at formulere disse tre krav for $j = 0$, da (1) og induktion så giver dem for hele \mathbb{Z} . Altså:

Der findes en isomorfi I mellem V_1 og $I_2(\mathbb{Z})$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : A_1 f_k(t) = A_1 f(t - k), \text{ hvor } f_k(t) = f(t - k)$$

$$I(A_1 f(t)) = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}} \Leftrightarrow I(A_1 f_k(t)) = (\alpha_{i-k})_{i \in \mathbb{Z}}$$

5. Når opløsningen nærmer sig $+\infty$ hhv. 0 , nærmer approksimationen sig det oprindelige signal hhv. 0 :

$$\begin{aligned} \text{Mængden } \lim_{j \rightarrow +\infty} V_{2^j} &= \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_{2^j} \text{ er tæt i } L_2(\mathbb{R}) \\ \lim_{j \rightarrow -\infty} V_{2^j} &= \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_{2^j} = \{0\} \end{aligned}$$

En samling vektorrum $(V_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$ og operatorer $(A_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$ opfyldende disse krav kaldes en *multiopløsningsanalyse* af $L_2(\mathbb{R})$.

2.2 Detaljer

Givet en multiopløsningsanalyse ses det let, hvordan de tilhørende operatorer $(D_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$, som giver detaljerne, må se ud. Da $A_{2^{j+1}}$ hhv. A_{2^j} er den ortogonale projektion på $V_{2^{j+1}}$ hhv. V_{2^j} , giver Dekompositionssætningen (se [5]), at D_{2^j} er den ortogonale projektion på O_{2^j} , hvor $V_{2^{j+1}} = V_{2^j} \oplus O_{2^j}$.

2.3 Skaleringsfunktion og ortogonal wavelet

Det viser sig, at en multiopløsningsanalyse har en gylden egenskab:

Sætning 1 Sæt $\phi_{2^j}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t)$ og lad en multiopløsningsanalyse af $L_2(\mathbb{R})$ være givet. Så findes en injektivt og entydigt bestemt skaleringsfunktion eller fader wavelet $\phi(t) \in L_2(\mathbb{R})$, så $(\phi_{2^j}(t - 2^{-j}n))_{n \in \mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for V_{2^j} .

Dette resultat åbner op for en eksplicit karakterisering af approksimationsoperatorerne $(A_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$, hvilket jeg vender tilbage til i afsnit 2.4.1. I afsnit 2.5.1 forklares, hvorfor det indre produkt dukker op i følgende karakterisering af en skaleringsfunktions Fourier transformerede:

Sætning 2 Lad $\phi(t) \in L_2(\mathbb{R})$ være en skaleringsfunktion og lad K_0 være det diskrete filter med impulsvar $k_0(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \phi_{2^{-1}}(u), \phi(u - n) \rangle$. Lad $K_0(\omega)$ være Fourier rækken givet ved:

$$K_0(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_0(n) \exp(-in\omega) \quad (2)$$

Så opfylder $K_0(\omega)$:

$$k_0(n) = O(n^{-2}) \quad (3)$$

$$|K_0(0)| = 1 \quad (4)$$

$$|K_0(\omega)|^2 + |K_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (5)$$

Lad omvendt $K_0(\omega)$ være en Fourier række opfyldende (3)-(5) samt

$$\forall \omega \in [0, \pi/2] : |K_0(\omega)| \neq 0 \quad (6)$$

Så er funktionen, hvis Fourier transformerede er:

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} K_0(2^{-p}\omega) \quad (7)$$

en skaleringsfunktion.

Filtre K_0 , som opfylder (5), kaldes *konjugerede filtre*, og har været genstand for megen opmærksomhed i signalbehandlings-litteraturen. Sætning 1 har en analog:

Sætning 3 Lad en multiopløsningsanalyse med skaleringsfunktion $\phi(t)$ og konjugeret filter K_0 være givet. Definer da en ortogonal (moder) wavelet $\psi(t)$ ved dens Fourier transformerede:

$$\hat{\psi}(\omega) = K_1(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2), \text{ hvor } K_1(\omega) = -\exp(i\omega)\overline{K_0(\omega + \pi)} \quad (8)$$

og sæt $\psi_{2^j}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t)$. Så er $(\psi_{2^j}(t - 2^{-j}n))_{n \in \mathbb{Z}}$ en ortonormal basis for O_{2^j} , og lader man $(n, j) \in \mathbb{Z}^2$, fås en ortonormal basis for $L_2(\mathbb{R})$.

Hermed er det muligt også at karakterisere $(D_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$ eksplicit. Der henvises til afsnit 2.4.2.

Givet et konjugeret filter som også honorerer (3), (4) og (6), står man altså indirekte med en skaleringsfunktion og en ortogonal wavelet. Det viser sig, at man kan vælge K_0 , så $\phi(t)$ og $\psi(t)$ får lokalisering i både tid og frekvens.

2.4 Diskretisering

Det forklares nu, hvordan Sætning 1 hhv. Sætning 3 kan anvendes til at karakterisere operatoren A_{2^j} hhv. D_{2^j} eksplicit.

2.4.1 Approksimation

For approksimationsoperatorens vedkommende drejer det sig om opløsningen af $f(t)$ i den til rådighed stående basis for V_{2^j} :

$$A_{2^j} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \phi_{2^j}(t - 2^{-j}n)$$

$A_{2^j} f(t)$ benævnes den *kontinuerte approksimation* af $f(t)$ ved opløsningen 2^j , og er altså karakteriseret ved en mængde indre produkter, som skrives:

$$A_{2^j}^d f = (\langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$$

og kaldes den *diskrete approksimation* af $f(t)$ ved opløsningen 2^j . Da det indre produkt simpelthen er en integration over \mathbb{R} , kan det skrives som en foldning:

$$\langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = (f(u) * \phi_{2^j}(-u))(2^{-j}n)$$

Altså kan $A_{2^j}^d f$ betragtes som værende fremkommet ved en filtrering af $f(t)$ efterfulgt af uniform sampling med afstand 2^{-j} . Idet, der er tale om approksimation og dermed udviskning af detaljer, kan man tænke på $\phi(t)$ som et lav-pas filter.

2.4.2 Detaljer

Forløbet er naturligvis det samme, når operatoren, der uddrager detaljer, skal beskrives udførligt. Der opløses i basen for O_{2^j} :

$$D_{2^j} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \psi_{2^j}(t - 2^{-j}n)$$

$D_{2^j} f(t)$ kaldes det *kontinuerte detalje-signal* for $f(t)$ ved opløsningen 2^j , og er identificeret ved de indre produkter:

$$\begin{aligned} D_{2^j}^d f &= (\langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle)_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= (f(u) * \psi_{2^j}(-u))(2^{-j}n)_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

som kaldes det *diskrete detalje-signal* for $f(t)$ ved opløsning 2^j .

Man kan altså ligeledes se $D_{2^j}^d f$ som resultatet af en filtrering af $f(t)$, der er samlet uniformt med afstand 2^{-j} . Da $\psi(t)$ uddrager den information, som $\phi(t)$ lader tilbage, er det naturligt at tænke på $\psi(t)$ som et høj-pas filter, hvilket falder godt i tråd med, at energien i $D_{2^j}^d f$ giver et mål for irregulariteten af signalet ved opløsningen 2^{j+1} .

2.4.3 Ortogonal wavelet repræsentation

I praksis vil man stå med et signal, der er målt ved en bestemt endelig opløsning. For en nemheds skyld antages, at denne er 1. Dvs. givet er signalet $A_1^d f = A_{2^0}^d f$. Det kan vises ved induktion over J , at dette oprindelige signal er repræsenteret af:

$$(A_{2^{-J}}^d f, (D_{2^j}^d f)_{-J \leq j \leq -1}) \quad (9)$$

Dette kaldes den *ortogonale wavelet repræsentation*. Beviset føres ikke her. Istedet anføres i afsnit 2.5.2 et rekonstruktionsargument. Parallellen til Crowley og Burt et al. er indlysende. $A_{2^{-J}}^d f$ svarer til den Gaussiske top af Laplacepyramiden, og $(D_{2^j}^d f)_{-J \leq j \leq -1}$ er lagene nedenunder.

De frekvensområder, som $\phi(t)$ og $\psi(t)$ slipper forbi, overlapper. Det gør det umiddelbart svært at betragte (9) som en opsplnitning af $A_1^d f$ i frekvenskanaler. Det er mere givtigt at ihukomme relationen $V_{2^{j+1}} = V_{2^j} \oplus O_{2^j}$. Alligevel kan det i forbindelse med en anvendelse forekomme, at man forsøger at gøre sammenfaldet ubetydeligt.

Det oprindelige signal består selvfølgelig heller ikke af numerabelt mange stikprøver, men $A_1^d f = (\alpha_n)_{1 \leq n \leq M}$, hvor M er en toerpotens. Normalt antager man med henblik på at undgå grænseproblemer symmetri mht. 0 og M :

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_{-n} & , \quad -M < n < 0 \\ \alpha_{2M-n} & , \quad 0 < n < M \end{cases}$$

Er impulssvaret for H , som defineres i (13), lige, vil $A_{2^j}^d f$ være symmetrisk mht. 0 og $2^{-j}M$.

I modsætning til Laplace-pyramider er en ortogonal wavelet repræsentation ikke redundant. Når, som antaget, det oprindelige signal består af M samples, er både $A_{2^j}^d f$ og $D_{2^j}^d f$ beskrevet ved $2^j M$ samples, $-J \leq j \leq -1$, og koefficienterne er uafhængige i statistisk forstand.

Det understreges, at (9) med $J = \log_2(M)$ for en given multiopløsningsanalyse er resultatet af den tilknyttede transformation.

2.5 Realisering

Signalerne $A_{2^j}^d f$ og $D_{2^j}^d f$ kan beregnes ved en simpel, iterativ algoritme, som beskrives nedenfor.

2.5.1 Opløsning

$\phi_{2^j}(t - 2^{-j}n)$ tilhører $V_{2^j} \subseteq V_{2^{j+1}}$, hvorfor Sætning 1 giver følgende opløsning i basis:

$$\phi_{2^j}(t - 2^{-j}n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}k) \rangle \cdot \phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-j-1}k) \quad (10)$$

Ved substitution under integraltegnet² fås identiteten:

$$\langle \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}k) \rangle = \langle \phi_{2^{-1}}(v), \phi(v - (k - 2n)) \rangle \quad (11)$$

Tages det indre produkt af $f(t)$ med hver side af (10), og udnyttes (11), står man med:

$$\langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{2^{-1}}(u), \phi(u - (k - 2n)) \rangle \cdot \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}k) \rangle \quad (12)$$

Lad nu H være det diskrete filter med impulssvar defineret ved³:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : h(n) = \langle \phi_{2^{-1}}(u), \phi(u - n) \rangle \quad (13)$$

og lad \tilde{H} være spejlfiltret med impulssvar $\tilde{h}(n) = h(-n)$. Indsættes (13) i (12) haves:

$$\langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(2n - k) \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}k) \rangle \quad (14)$$

² $v = 2(2^j u - n)$.

³Bemærk analogien til $k_0(n)$ i Sætning 2.

Ligning (14) viser, at $A_{2^j}^d f$ fås ved at folde $A_{2^{j+1}}^d f$ med \tilde{H} og beholde hveranden sample i resultatet.

Ved lignende regninger fås, at hvis man lader G være det diskrete filter med impulssvaret:

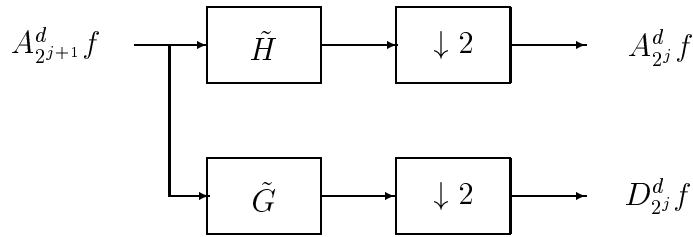
$$\forall n \in \mathbb{Z} : g(n) = \langle \psi_{2^{-1}}(u), \phi(u - n) \rangle \quad (15)$$

og sætter \tilde{G} til spejlfiltret med impulssvar $\tilde{g}(n) = g(-n)$, kan man skrive:

$$\langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(2n - k) \langle f(u), \psi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}k) \rangle$$

og altså ved at folde $A_{2^{j+1}}^d f$ med \tilde{G} og smide hveranden sample væk komme til at stå med $D_{2^j}^d f$

Altså kan man skaffe sig en ortogonal wavelet repræsentation for $A_1^d f$ ved at dekomponere $A_{2^{j+1}}^d f$ i $A_{2^j}^d f$ og $D_{2^j}^d f$ for $-J \leq j \leq -1$. Figur 1 illustrerer en iteration i denne *pyramide-algoritme*.



Figur 1: Opløsning.

2.5.2 Rekonstruktion

Der gælder $\phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-j-1}n) \in V_{2^{j+1}} = V_{2^j} \oplus O_{2^j}$, hvorfor der haves opløsningen:

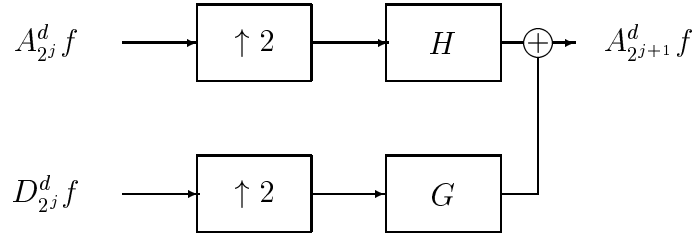
$$\begin{aligned} \phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-j-1}n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}n), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}k) \rangle \\ &\quad \cdot \phi_{2^j}(t - 2^{-j}k) \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}n), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}k) \rangle \\ &\quad \cdot \psi_{2^j}(t - 2^{-j}k) \end{aligned} \quad (16)$$

Betragter man det indre produkt af $f(t)$ med begge sider af (16), bruger identiteten (11) og en tilsvarende for $\psi_{2^j}(u - 2^{-j}n)$, samt benytter sig af

definitionerne (13) og (15) på filtrene H og G får man:

$$\begin{aligned} \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}n) \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k) \langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}k) \rangle \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - 2k) \langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}k) \rangle \end{aligned}$$

Denne ligning viser, at $A_{2^{j+1}}^d f$ kan rekonstrueres ved indsættelse af nuller mellem hvert par af samples i $A_{2^j}^d f$ og $D_{2^j}^d f$, efterfulgt af foldning med H hhv. G . Dette er illustreret i Figur 2.



Figur 2: Rekonstruktion.

2.6 Kort om wavelets generelt

Jeg vil kort argumentere for, hvorfor Mallats tilgang har sin vugge i funktionalanalysen⁴. Med symbolbrugen $\psi_s(t) = \sqrt{s}\psi(st)$ definerede Morlet og Grossman i [6] wavelet transformationen (WT) af $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ som:

$$WTf(s, p) = \langle f(t), \psi_s(t - p) \rangle, (s, p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Dvs. som opløsningen af $f(t)$ i familien $(\psi_s(t - p))_{(s,p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}}$. Denne repræsentation er normalt redundant, og rekonstruktion er ikke altid mulig. Det interessante er, at der om den Fourier transformerede af $\psi_s(t)$ gælder:

$$\hat{\psi}_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{s}} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{s}\right)$$

Altså varierer opløsningen af WT med skalaparametren s . Specielt dekomponeres $f(t)$ i frekvensbånd, hvis bredde er konstant på en logaritmisk skala.

Er dagsordenen diskretisering, er det derfor nødvendigt at sample s eksponentielt. Antag at man tager stikprøver i $(\alpha^j)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$. Så må p i de tilhørende

⁴Mit kendskab til værkerne [6], [7] og [8], som refereres nedenfor, er indirekte gennem [4]. Henvisningerne er medtaget for fuldstændighedens skyld.

kanaler samples med en hastighed, der er proportional med α^j , f.eks. α^j/β . Altså kan den diskrete wavelet transformation (WT^d) skrives:

$$WT^d f(j, n) = WT f(\alpha^j, n\beta/\alpha^j), (j, n) \in \mathbb{Z}^2$$

Den opløser altså $f(t)$ i funktionerne $\psi_{\alpha^j}(t - (n\beta/\alpha^j))_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$. En vigtig klasse af WT^d blev opdaget af Meyer [7] og Stromberg [8], som viste, at der findes wavelets $\psi(t)$, så $(\psi_{2^j}(t - 2^{-j}n))_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2}$ er en ortonormal basis for $L_2(\mathbb{R})$. Det er af disse valg $\alpha = 2$ og $\beta = 1$ navnet ortogonal wavelet kommer⁵. Eksistensresultatet gav genlyd. Indtil da havde man ikke regnet med, at det alment var muligt at fremstille et fuldstændigt ortonormalsystem, hvis elementer havde lokalisering i både tid og frekvens.

I rammen af funktionalanalyse er man oftest interesseret i at vælge sin moder wavelet $\psi(t)$, så det kan lade sig gøre at udtale sig om forskellige egenskaber for en funktion $f(t)$ på baggrund af dens wavelet koefficienter. F.eks. afhænger regulariteten af $f(t)$ i t_0 under de rette forudsætninger af, hvor hurtigt wavelet koefficienterne aftager i nærheden af t_0 . En af pionererne på området har været Meyer. I signalbehandlings-sammenhæng som f.eks. mønstergenkendelse og subband coding — se umiddelbart nedenfor — ønsker man derimod, at de resulterende filtre bliver sådan, at beregningerne kan implementeres effektivt. Nogle filtre kan være nyttige i begge kontekster. I eksemplerne i afsnit 5 er således anvendt filtret D4 fra den klasse af filtre, som Daubechies [9] konstruerede, og som gør $\phi(t)$ regulær. Dette er ikke bare ønskværdigt i funktionalanalytisk forstand, men også i forbindelse med komprimering vha. multiopløsnings-transformation [10].

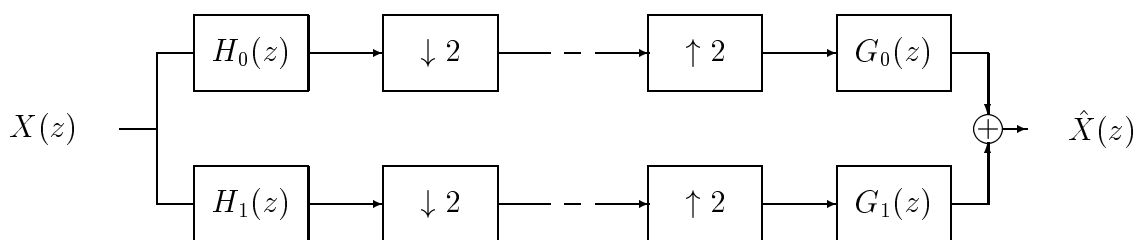
3 Kvadraturfiltre

Den anden måde, den omtalte dekompositionsmetode blev fundet på, har rødder i den rene signalbehandling. Når et kontinuert signal som f.eks. lyd diskretiseres ved sampling, vil der opstå støj som følge af kvantisering. Det er derfor af Crochiere et al. [11] blevet foreslået at opsplitte spektret i delbånd, og kode disse separat. Denne *subband coding* indkapsler den introducerede støj i de valgte frekvensintervaller, og giver mulighed for at bruge forskellige kbps-rater til kodning af distinkte bånd. De resulterende delsignaler kan eksempelvis transmitteres eller lagres hver for sig, dekodes og sammensættes til en diskretisering af det oprindelige signal.

I det efterfølgende er antallet af kanaler for en nemheds skyld, og fordi der sigtes efter en parallel til ortogonale wavelets, valgt til to. Dvs. spektret

⁵Som det anvendes af Mallat, er begrebet ortogonal wavelet dog mere specifikt, idet der findes basiser, som ikke kan fremstilles af en multiopløsningsanalyse [9].

deles midt over i en øverste og nederste del. Så illustreres fremgangsmåden i z -domænet, hvor foldning består i multiplikation, ved en togrenet *filterbank* — se Figur 3. Ved filtrering med $H_0(z)$ hhv. $H_1(z)$ fremskaffes lav-pas- hhv. høj-pas-delen af det oprindelige signal $X(z)$. Dette efterfølges af nedsampling med en faktor to. Dermed er det totale antal samples i repræsentationen af $X(z)$ uændret. Dette beskriver analysedelen. De stiplede linier symboliserer kodning og dekodning, samt evt. anden behandling, før delsignalerne i rekonstruktionsdelen bringes til at producere en interpolation $\hat{X}(z)$ af $X(z)$ vha. opsampling og filtrering med $G_0(z)$ og $G_1(z)$.



Figur 3: Filterbank.

En sådan yderligere behandling kunne ganske trivielt bestå i helt at bortkaste det ene delsignal, hvilket ville nedsætte antallet af samples, dvs. komprimere. Det forekommer især naturligt, når informationsindholdet af signalet $X(z)$ a priori vides at være fordelt ujævnt i de to frekvensområder. Mindre drastisk kunne man, som skrevet, kvantisere samples hørende til det mest hhv. mindst informationstunge del-bånd med flest hhv. færrest bits.

Som eksempel kan nævnes et billede. De lave frekvenser vil som oftest veje tungere end de høje i fastlæggelsen af dets udseende, hvilket blandt andet udnyttes i JPEG-standarden for billedkompression.

Afhængigt af, hvad man vælger, vil det rekonstruerede signal $\hat{X}(z)$ i højere eller lavere grad afvige fra det oprindelige signal $X(z)$. Man sigter imidlertid efter *perfekt rekonstruktion*, dvs. $\hat{X}(z) = X(z)$, når der ses bort fra kodning og dekodning, hvilket jeg vil gøre i det efterfølgende. Relationen kan så ved faktorisering skrives:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{2}[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)]X(z) \\ &+ \frac{1}{2}[H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)]X(-z) \end{aligned} \quad (17)$$

Ser man bort fra $X(\cdot)$, beskriver det første led impulssvaret for filterbanken, hvis der ikke tages hensyn til virkningen af op- og nedsampling, som så til gengæld er indeholdt i det andet led, og den første af de tre typer fejl, analysen og rekonstruktionen kan introducere:

- A. Aliasing. Velkendt.
- B. Kort-tids faseforvrængning. Dvs. frekvenskomponenterne forskydes i forhold til hinanden.
- C. Kort-tids frekvensforvrængning. Altså at nogle frekvenser dæmpes mere end andre.

I [11] benytter man sig af disjunkte bånd-pas filtre, men for at gøre den aliasing, der resulterer, beskeden, er det nødvendigt med temmelig komplicerede filtre. Med realisering i baghovedet er dette ærgeligt. Der er opdaget andre, mere brugbare typer af filtre, hvilket beskrives nedenfor.

3.1 Kvadratur spejlfiltre

Antag nu, at $H_0(z)$ er et lav-pas filter $H(z)$, og at $H_1(z)$ er høj-pas spejlfiltret $H(-z)$ således, at analysefiltrene jvf. Esteban og Galand [12] er et par *kvadratur spejlfiltre* (QMF), som altså opfylder:

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

Så kan aliasing-leddet i (17) afskrives ved at vælge:

$$G_0(z) = 2H(z) \quad G_1(z) = -2H(-z)$$

For QMF-filterbanken gælder så:

$$\hat{X}(z) = [H^2(z) - H^2(-z)]X(z)$$

Hvis man ser bort fra forsinkelse, kræver perfekt rekonstruktion *unity gain*. Dermed menes, at koefficienterne i $|H^2(z) - H^2(-z)|$ bortset fra en enkelt, som er 1, alle er 0. Desuden er det ønskeligt, at $H(z)$ er lineær-fase, idet QMF-filterbanken så kan simplificeres, og dermed realiseres med halvt så mange filtre på en måde, så effektiviteten firedobles. Desværre er det kun trivielle lineær-fase FIR filtre, der giver unity gain. Et eksempel herpå er sum- og differencefiltrene:

$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1}) \quad H_1(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1}) \quad (18)$$

Den slags filtre giver ikke mulighed for sufficient frekvensopløsning. Der er udviklet forskellige metoder til at designe højereordens filtre, men dem vil jeg ikke omtale.

3.2 Konjugerede kvadraturfiltre

Det er nemlig ikke nødvendigt, hvis man som Smith og Barnwell [13] fraviger kravet om, at filtrene i filterbanken alle kan udtrykkes ved frekvensforskydning og skalering af det samme lav-pas filter $H(z)$.

Betragt med det for øje (17) skrevet på matrixform:

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2}x^T B g \\ x^T &= (X(z) X(-z)) \\ g^T &= (G_0(z) G_1(z)) \\ B &= \begin{pmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Så sikres perfekt rekonstruktion modulo forsinkelse ved at opfylde:

$$B g = \begin{pmatrix} 2z^{-N} \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor $N \in \mathbb{Z}_+$ er den introducerede forsinkelse. Definerer man analysefiltrene som et par *konjugerede kvadraturfiltre* (CQF):

$$H_1(z) = -H_0(-z^{-1})z^{-N} \quad (19)$$

antager $N \in \mathbb{O}$, og sætter:

$$G_0(z) = H_0(z^{-1})z^{-N} = H_1(-z) \quad G_1(z) = H_1(z^{-1})z^{-N} = -H_0(-z) \quad (20)$$

bliver impulssvaret $S(z)$ for CQF-filterbanken:

$$\begin{aligned}S(z) &= \frac{1}{2}[H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1})]z^{-N} \\ &= \frac{1}{2}[P(z) + P(-z)]z^{-N}\end{aligned}$$

hvor *produktfilteret* $P(z)$ relaterer til $H_0(z)$ som:

$$P(z) = H_0(z)H_0(z^{-1}) \quad (21)$$

Nu går det hele op i en højere enhed, hvis $S(z)$ blot er forsinkelsen. Lidt manipulation:

$$\begin{aligned}P(z) + P(-z) &= 2 \\ &\Updownarrow \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + (-1)^n) p(n) z^{-n} &= 2 \\ &\Updownarrow \\ p(n) \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) &= \delta(n)\end{aligned} \quad (22)$$

giver betingelsen i tidsdomænet. Det drejer sig altså om at finde et filter $P(z)$ som først og fremmest honorerer (22), men som også kan faktoriseres som krævet af (21).

Som det bla. beskrives i [13], er der blevet ofret en masse energi på dette detektivarbejde, hvilket da også har givet udslag i et væld af designteknikker. Pladsen bliver dog for trang, hvis jeg skal gå i nogen form for detaljer.

Er man ikke interesseret i en real-time-implementering ved fysiske komponenter, behøver man ikke at lægge flere begrænsninger på N end de allerede nævnte. Ellers må man vælge $N = L - 1$, hvor L er de indgående filteres længde, der altså skal være lige og positiv.

4 Analogien

Det burde nu være intuitivt klart, at multiopløsningsanalyse er beslægtet med kvadraturfiltre, men for at gøre koblingen indlysende, anfører jeg nogle udregninger. Sammenholdes ligning (2) og (8) og følgende udledning:

$$\begin{aligned}
 K_1(\omega) &= -\exp(i\omega)\overline{K_0(\omega + \pi)} \\
 &= -\exp(i\omega)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{k_0(n)}\exp(in\omega)(-1)^n \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}-\overline{k_0(n)}\exp(i\omega(n+1))(-1)^n \\
 &\stackrel{m \leftarrow -n-1}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}-\overline{k_0(-m-1)}\exp(-im\omega)(-1)^{-m-1}
 \end{aligned}$$

fås sammenhængen:

$$k_1(m) = -k_0(-m-1)(-1)^{-m-1}$$

når konjugering antages ingen effekt at have⁶. Derfor haves en lignende sammenhæng mellem rekonstruktionsfiltrene:

$$g(n) = -h(-n-1)(-1)^{-n-1} \quad (23)$$

I z -domænet haves altså:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}-h(-n-1)(-1)^{-n-1}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}-h(m)(-1)^m z^{m+1} \\
 &= -z\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(m)(-z)^m = -zH(-z^{-1}) \\
 \tilde{H} &= H(z^{-1}) \\
 \tilde{G} &= G(z^{-1})
 \end{aligned}$$

⁶Hvilket også kan indses ved at anvende invers Fourier transformation på (8).

Definer nu fire nye filtre ved:

$$\begin{aligned} H'_0(z) &= H(z^{-1}) \\ H'_1(z) &= G(z^{-1}) = -z^{-1}H'_0(-z^{-1}) \\ G'_0(z) &= H(z) = H'_0(z^{-1}) = zH'_1(-z) \\ G'_1(z) &= G(z) = H'_1(z^{-1}) = -zH'_0(-z) \end{aligned}$$

Så er der fuld overensstemmelse med relationerne (19) og (20) bortset fra et par detaljer:

- G_0 og G_1 er forsinkede i forhold til G'_0 og G'_1 , hvilket er nødvendigt for at kunne realisere vha. kausale filtre.
- I det hele taget opererer man i konteksten af subband coding med en mere generel forsinkelse N , end den på 1, der optræder i Mallats fremstilling af multiopløsningsanalyse. Og alligevel ikke. Vælger man i (8) istedet $K_1(\omega) = -\exp(iN\omega)\overline{K_0(\omega + \pi)}$, er den almene forsinkelse indført.

Enhver multiopløsningsanalyse giver altså anledning til et par konjugerede kvadraturfiltre⁷. Det omvendte gælder dog ikke, hvilket har at gøre med (4).

5 Eksempel

I WAVELAB⁸ er forfattet et program, der illustrerer udvalgte dele af ovenstående:

```
% Der fremstilles et signal, der kan arbejdes paa.
SignalL=2^8;
t=[1:SignalL]./SignalL;
x=MakeSignal('Bumps',SignalL);

% Definition af filtre. Bemærk at MirrorFilt giver alternerende fortegn,
% og ikke hvad der normalt kaldes spejlfiltret. Det faas derimod vha. reverse,
% som ogsaa implementerer forsinkelse. Bemærk at G er forsinket det dobbelte
% af FilterPar i forhold til sin definition ved H i afsnittet Analogien - og
% at der ikke er tale om den specielle forsinkelse paa 1, som Mallat benytter
% sig af. Det har ingen indflydelse paa formen af den ortogonale wavelet, som
% produceres, men den bliver, som G, forsinket - dvs. forskudt mod +\infty.
% Det kan man dog ikke se paa figuren, da det i forbindelse med manipulation
% af akserne implicit antages, at psis stoette starter i 0. Antagelsen
% gøres ogsaa for skaleringsfunktionen phi, men det har ingen betydning, da
% dens stoette faktisk skal starte i 0.
FilterType='Daubechies'; FilterPar=4;
H=MakeONFilter(FilterType,FilterPar)
G=-reverse(MirrorFilt(H));
%Htilde=H(z^(-1));
```

⁷Dog induceres *kvadratur spejlfiltrene* (18) af den velkendte Haar-basis for $L_2(\mathbb{R})$.

⁸<http://playfair.stanford.edu:80/~wavelab/>


```

%Gtilde=G(z^(-1));

% Produktion af scl og wav ved iteration. Efter kaskade af
% rekonstruktionstrinnet skaleres foerste- og andenkoordinater passende.
J=10;
Coeff=1; Coeff=UpSample(Coeff);
phi=conv(Coeff,H); psi=conv(Coeff,G);
for i=-(J-1):-1
    phi=UpSample(phi);
    phi=conv(phi,H);
    psi=UpSample(psi);
    psi=conv(psi,H);
end;
domainshrink=2^(-J); rangeexpand=2^(J/2);
i=1;
for n=0:(length(phi)-1)
    scl(i)=rangeexpand*phi(n+1);
    wav(i)=rangeexpand*psi(n+1);
    domain(i)=n*domainshrink;
    i=i+1;
end;
figure(1);
subplot(2,1,1); plot(domain,scl);
ylabel('phi(t)'); title('(a)');
subplot(2,1,2); plot(domain,wav);
xlabel('t'); ylabel('psi(t)'); title('(b)');

% Oploesning samt illustration af resultatet.
xopl=FWT_PO(x,0,H);
figure(2)
subplot(3,1,1); plot(t,x);
ylabel('x(t)'); title('(a)');
v=axis; ymin=v(3); ymax=v(4); axis([0 1 ymin ymax]);
subplot(3,1,2); PlotMultiRes(xopl,0,0,H);
xlabel(''); ylabel('j'); title('(b)');
subplot(3,1,3); PlotWaveCoeff(xopl,0,0);
xlabel('t'); ylabel('j'); title('(c)');

% Rekonstruktion.
xrkst=IWT_PO(xopl,0,H);

% Simulering af filterbank.
H0=MakeONFilter(FilterType,FilterPar);
H1=-reverse(MirrorFilt(H0));
G0=reverse(H0);
G1=reverse(H1);
P=conv(H0,reverse(H0));
H0minus=MirrorFilt(H0);
Pminus=conv(H0minus,reverse(H0minus));
S=.5*(P+Pminus)
xhat=conv(x,S);

% Illustration af sammenhaeng mellem x, xrkst og xhat.
figure(3)
subplot(3,1,1); plot(x);
ylabel('x(t)'); title('(a)');
subplot(3,1,2); plot(x-xrkst);
ylabel('x(t)-xrkst(t)'); title('(b)');
subplot(3,1,3); plot(xhat);
ylabel('t'); ylabel('xhat(t)'); title('(c)');
v=axis; xmin=v(1); xmax=v(2); axis([xmin xmax ymin ymax]);

```

Når programmet udføres, produceres følgende uddata:

H =

0.4830 0.8365 0.2241 -0.1294

S =

0 0.0000 0 1.0000 0 0.0000 0

samt tre figurer. Dette forklares i det følgende.

Udover Mallat — se (7) — har Daubechies gjort sig til talsperson for indirekte konstruktion af orthogonal wavelet og skaleringsfunktion vha. filtre, hvilket er den ene af de to metoder⁹, man benytter sig af i dag [10]. Hvis man derefter er interesseret i den tilhørende multiopløsningsanalyse, kan man bygge den ud fra $\phi(t)$.

Under alle omstændigheder lægger man ud med at designe et passende filter H , hvorefter G defineres jvf. (23). Ideen er så simpelthen at syntetisere de tilhørende basisfunktioner som vist på Figur 2 ud fra en passende værdi af (9). Er man ude efter skaleringsfunktionen hhv. den ortogonale wavelet, skal man starte med:

$$(1, \overbrace{0, \dots, 0}^{M-1}) \quad \text{hhv.} \quad (0, \overbrace{1, 0, \dots, 0}^{M-1})$$

Dette giver $\phi_{2^{-j}}(t)$ og $\psi_{2^{-j}}(t)$, hvorfor der må manipuleres, før man har $\phi(t)$ og $\psi(t)$. Resultatet kan ses på Figur 4. Der er taget udgangspunkt i D4-filtret, hvis koefficienter kan aflæses af uddata.

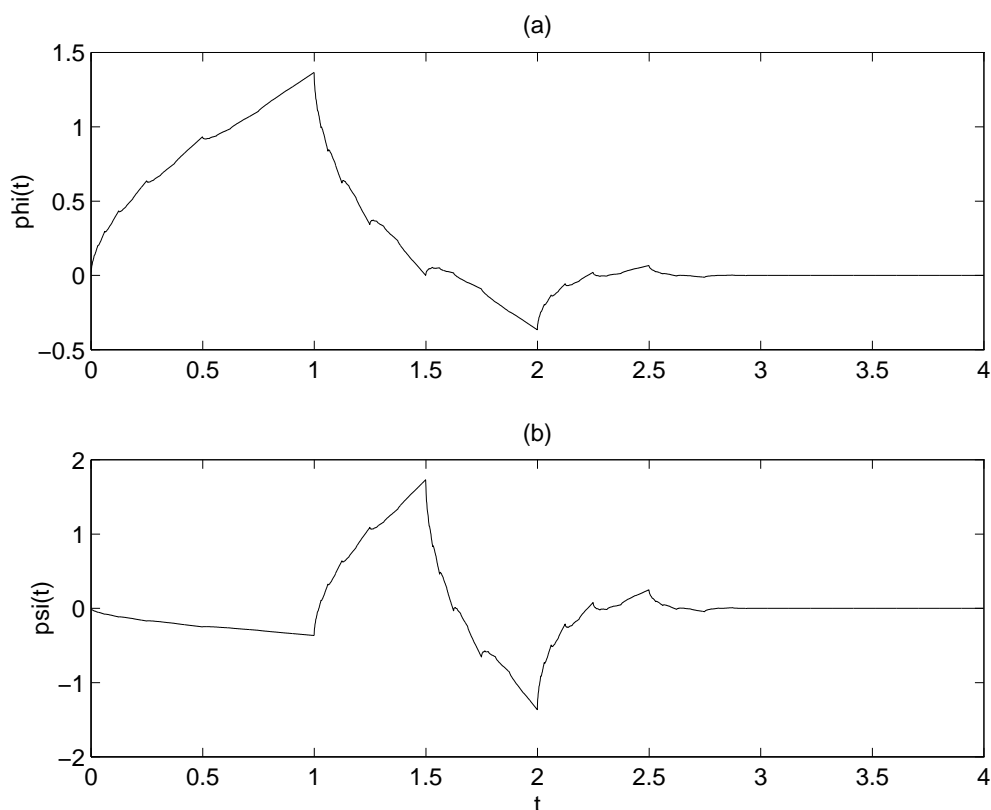
Programmet fremstiller også en illustration af den wavelet transformerede af det valgte, kunstige signal — se Figur 5. Man ser tydeligt, at detaljesignalerne er størst der, hvor \mathbf{x} varierer mest.

Figur 6 viser sammenhængen mellem \mathbf{x} , \mathbf{xrkst} og \mathbf{xhat} . At \mathbf{xhat} er forsinket i forhold til \mathbf{x} er måske umiddelbart svært at se, siden D4 er så kort. Man kan dog tydeligt spore forsinkelsen i impulssvaret \mathbf{S} , der er en del af uddata. Læg mærke til, at \mathbf{xrkst} ikke er faseforskudt, da WT^d og IWT^d ikke skal ske i real-time, hvorfor man ikke behøver at forsinke ikke-kausale filtre i Figur 1 og Figur 2. En forskydning ville også være katastrofal, da $A_{2^j}^d f$ og $D_{2^j}^d f$ ikke ville være indbyrdes synkroniserede.

6 Efterskrift

Det er blevet opridset, hvorfor den traditionelt anvendte *STFT* ikke opfylder de krav, man naturligt stiller til en dekompositionsteknik, som kan bruges ved

⁹Den anden består i at udglatte waveletten *sinc*, der har den Fourier transformerede $\hat{\psi}(\omega) = 1_{] \pi, 2\pi[}$. Er gjort af bla. Meyer og Stromberg.

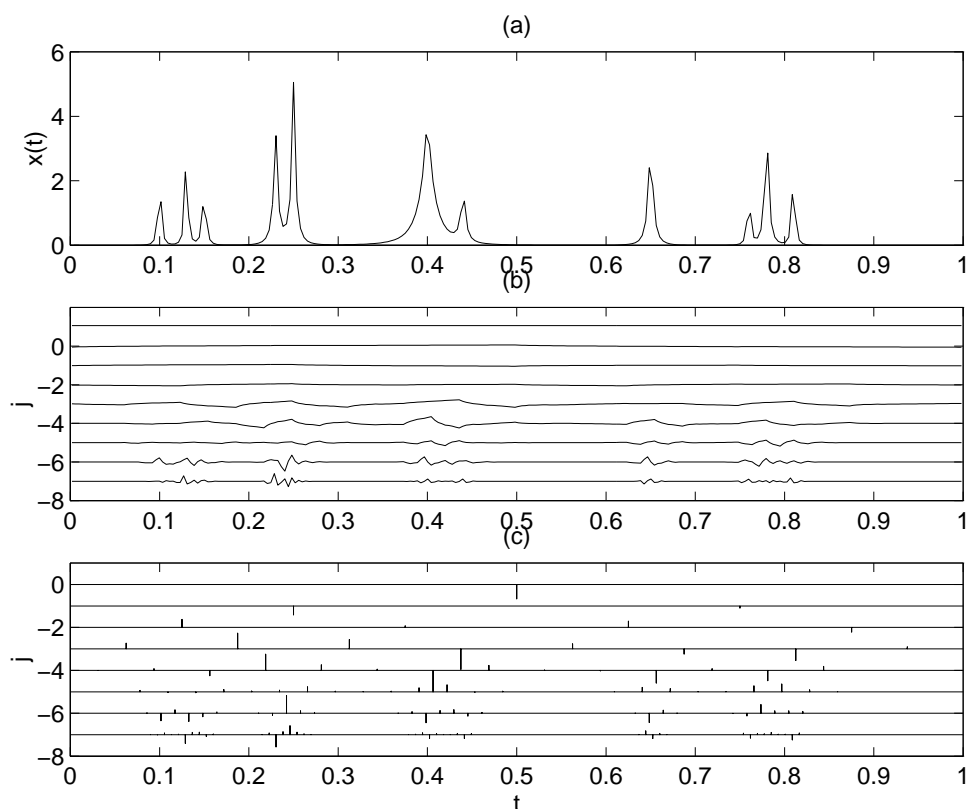


Figur 4: Basisgeneratorer hørende til D4-filtret. (a) Skaleringsfunktion. (b) Ortogonal wavelet.

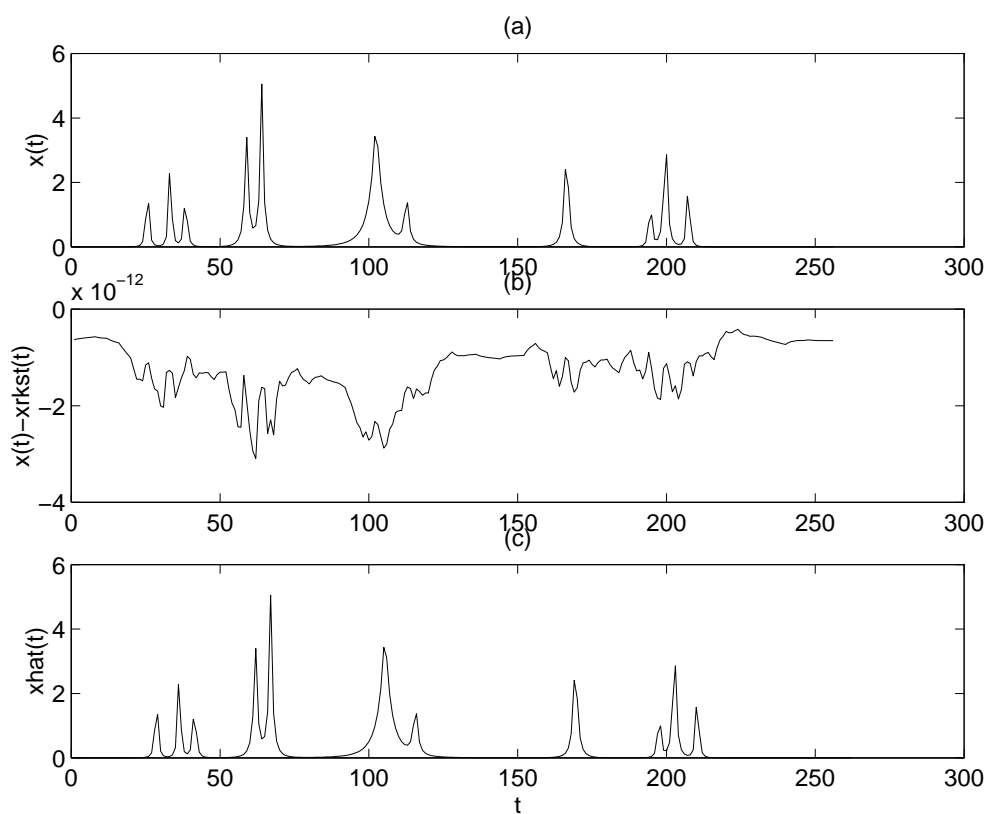
mønstergenkendelse. Det gør derimod den multiopløsnings-transformation opdaget af Mallat, der er beskrevet, og som er et eksempel på begrebet WT . Det viser sig, at de filtre, man vil implementere med, er af samme type, som dem, der er blevet foreslået til subband coding, nemlig CQF.

På falderebet vil jeg også godt nævne, at der ligger mange generaliseringer af de behandlede emner lige for. Det er nemmest at udtrykke dem vha. filterbanks. Som forklaret i [10] kan man f.eks. betragte biortogonale af slagsen, eller man kan lade dem have vilkårlig træstruktur.

Især transformation af flerdimensionelle signaler står åben. Som Mallat [3] bemærker, er man dog jvf. Meyer [7] på sikker grund med separable multiopløsningsanalyser. I dette tilfælde kan man opsplitte sit signal i uafhængige, *rumligt orienterede* kanaler, hvilket selvsagt er et kraftfuldt værktøj til brug ved mønstergenkendelse.



Figur 5: Grafisk fremstilling af WT^d . (a) Signalet x . Førsteaksen er skaleret for at lette sammenligning. (b) Den kontinuerte approksimation $A_{2^{-j}}f(t)$, samt de kontinuerte detalje-signaler $(D_{2^j}f(t))_{-J \leq j \leq -1}$. Her bruges kontinuert til at betegne tilnærmelse - de består selvfølgelig af endeligt mange funktionsværdier. Pointen er, at den ortogonale wavelet repræsentation er brugt som koefficienter til $\phi_{2^{-j}}(t)$ og $\psi_{2^j}(t - 2^{-j}n)_{-J \leq j \leq -1}$ for passende værdier af n på hver skala. Bid endvidere mærke i, at WAVELAB i sin fremstilling lader j tilhøre $\{-(J-1), \dots, 0\}$. For at opnå symbolkonsistens med Mallat, skal der altså trækkes 1 fra værdierne af j på andenaksen, hvilket også gælder for: (c) De diskrete detalje-signaler $(D_{2^j}^d f)_{-J \leq j \leq -1}$.



Figur 6: (a) Oprindeligt signal \mathbf{x} med førsteaksen skaleret. (b) Forskel mellem \mathbf{x} og resultatet \mathbf{x}_{rkst} af IWT^d . Den opstår grundet den endelige præcision i datamatens aritmetik. (c) Signalet $\hat{\mathbf{x}}$, der kommer ud af filterbanken. Bemærk forsinkelsen.

Litteratur

- [1] P. J. Burt og E. H. Adelson: **The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code**, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-31, april 1983, side 532-540.
- [2] J. Crowley: **A Representation for Visual Information**, *Tech. Rep. CMU-RI-TR-82-7, Robotics Inst., Carnegie-Mellon Univ.*, 1987.
- [3] S. G. Mallat: **A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation**, *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell.*, vol. 11, juli 1989, side 674-693.
- [4] S. G. Mallat: **Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models**, *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process.*, vol. 37, december 1989, side 2091-2110.
- [5] G. Grubb: **Matematik 2MA 1994-95 Kapitel IV. Fourier Analyse**.
- [6] A. Grossman og J. Morlet: **Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape**, *SIAM J. Math.*, vol. 15, 1984, side 723-736.
- [7] Y. Meyer: **Principe d'incertitude , bases hilbertiennes et algebres d'operateurs**, præsenteret ved Bourbaki-seminaret, 1985-1986 (Paper 662).
- [8] J. Stromberg: **A Modified Franklin System and Higher-Order Systems of R_n as Unconditional Bases for Hardy Spaces**, *Proc. Conf. Harmonic Anal. Honor of a. Zygmund*, vol. 2, Wadsworth Math Series, side 475-493.
- [9] I. Daubechies: **Ten Lectures on Wavelets**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992, kapitel 5.
- [10] K. Ramchandran, M. Vetterli og C. Herley: **Wavelets, Subband Coding, and Best Bases**, *Proc. IEEE*, vol. 84, no. 4, april 1996.
- [11] R. E. Crochiere, S. A. Webber og J. L. Flanagan: **Digital Coding of Speech in Sub-bands**, *Proc. 1976 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, maj 1976.

- [12] D. Esteban og C. Galand: **Application of Quadrature Mirror Filters to Split Band Voice Coding Schemes**, *Proc. 1977 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Hartford, CT, maj 1977, side 191-195.
- [13] M. J. T. Smith og T. P. Barnwell: **Exact Reconstruction Techniques for Tree-Structured Subband Coders**, *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process.*, vol. ASSP-34, no. 3, juli 1986, side 434-441.